SF1624 Algebra och geometri

Trettonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

18 november, 2009

Formel för determinanten

Vi kom fram till en allmän formel för determinanten av en $n \times n$-matris som

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

där summan går över alla *permutationer*, σ, och där $\mathrm{sgn}(\sigma)$ är *tecknet*, som är $+1$ om σ är en jämn permutation och -1 om σ är en udda permutation.

Definition (udda och jämna permutationer)

En permutation $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ är *jämn* om det krävs ett jämnt antal byten av två positioner för att sortera om den till $(1, 2, \ldots, n)$ och den är *udda* om det krävs ett udda antal byten. (*transpositioner*)

Rad- och kolonnoperationer

Vi kommer att kunna använda oss av att determinanten beter sig väl när vi utför rad- eller kolonnoperationer:

1. Determinanten ändras inte när vi lägger en multipel av en rad eller kolonn till en annan.
2. Determinanten multipliceras med a om vi multiplicerar en rad eller kolonn med a.
3. Determinanten byter tecken om vi byter plats på två rader eller två kolonner.

Triangulära matriser

Definition (Över- och undertriangulära matriser)

En matris är *övertriangulär* om alla element under diagonalen är noll och den är *undertriangulär* om elementen över diagonalen är noll.

Sats

Determinanten av en övertriangular matris är produkten av diagonalelementen.

Bevis.

Det finns bara en av de $n!$ termerna i formeln för determinanten som är skild från noll, och det är den första, dvs

$$a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$$

$\square$

Exempel på Gausselimination för determinant

Med radooperationer får vi att

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-3) = -3$$

eftersom vi bara gjort radoperationer av typ 1 som inte ändrar determinanten.

Determinant av produkt

Sats

Om A och B är $n \times n$-matriser är

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

dvs determinanten respekterar multiplikation.

Bevis.

Det är sant om A är en elementär matris. Vi kan använda Gausselimination för att skriva A och B som produkter av elementära matriser:

$$A = E_1 E_2 \cdots E_m, \qquad B = E_{m+1} E_{m+2} \cdots E_{m+k}$$

och vi får att $\det(A) = \prod_{i=1}^{m} \det(E_i)$, $\det(B) = \prod_{i=1}^{k} \det(E_{m+i})$,

$$\det(AB) = \prod_{i=1}^{m+k} \det(E_i) = \left(\prod_{i=1}^{k} \det(E_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{m} \det(E_{m+i})\right)$$

Determinant som volymsförändring

Om vi har en kvadratisk matris A som svarar mot en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ kan vi tolka determinanten som en volymsförändring:

Sats

Om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ med matris A och Ω är ett område i $\mathbb{R}^n$ så gäller att

- $Volymen(T(\Omega)) = |\det(A)| Volymen(\Omega)$
- $\det(A) < 0$ *precis om T ändrar orienteringen, dvs om T skickar ett högerorienterat system till ett vänsterorienterat system.*